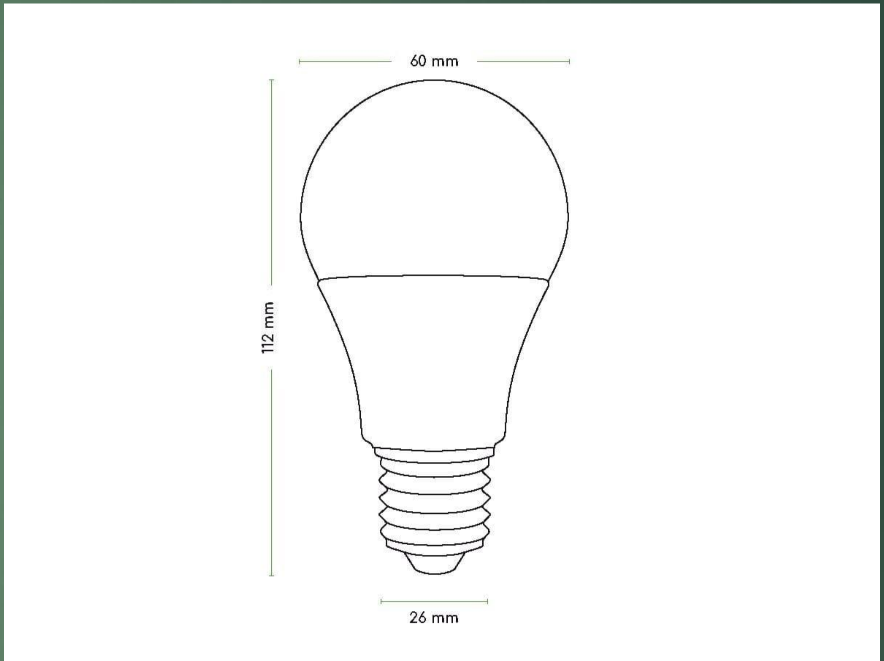
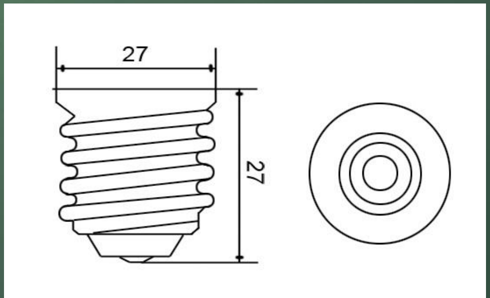
Komputerowo wspomagane projektowanie

dr inż. Michał Dolata
www.mdolata.zut.edu.pl

WIMiM

Modelowanie żarówki





Metoda elementów skończonych

- Otaczająca nas rzeczywistość ma postać ciągłą,
- Naturalną cechą naszego umysłu jest chęć dyskretyzacji otaczającego nas świata.

Metoda elementów skończonych

- Otaczająca nas rzeczywistość ma postać ciągłą,
- Naturalną cechą naszego umysłu jest chęć dyskretyzacji otaczającego nas świata.

Metoda elementów skończonych

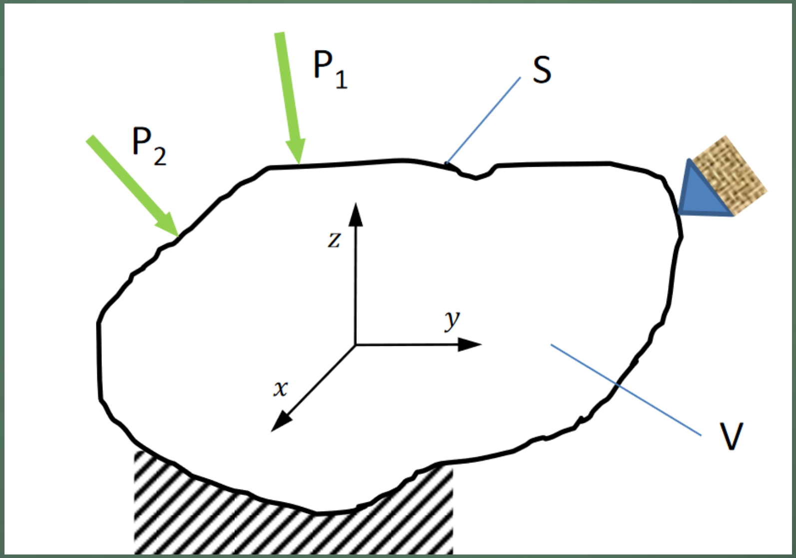
- Można wysnuć tezę, że istnieje ogólne pojęcie ***standardowego problemu dyskretnego,***
- Definicja procesu dyskretyzacji jako metody aproksymacji problemów ciągłych, gdzie:
  - Zagadnienie ciągłe podzielone jest na skończoną liczbę części, których zachowanie opisywane jest przez skończoną liczbę parametrów,
  - Rozwiązanie systemu jako złożenia jego elementów podlega tym samym prawom jak stosowanym dla standardowego problemu dyskretnego.

Metoda elementów skończonych

- Odnosząc się do MES można wyróżnić dwa działania:
  - Podział (dyskretyzacja) układu na elementy skończone,
  - Zastąpienie równań różniczkowych równaniami algebraicznymi.

Metoda elementów skończonych

- Skąd te różniczki?
  - Ogólne sformułowanie liniowej teorii sprężystości



Źródło: dr inż. K. Konowalski: *Podstawy Metody Elementów Skończonych, http://www.kmpkm.zut.edu.pl/pub/MES/WYKLADY/MBM-n2/W5.pdf*

Metoda elementów skończonych

- Skąd te różniczki?

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ - składowe odkształcenia
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - składowe naprężenia

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[(1-\upsilon)\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_z\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[(1-\upsilon)\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_z\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left[(1-\upsilon)\varepsilon_z + \upsilon\varepsilon_x + \upsilon\varepsilon_y\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{zx}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

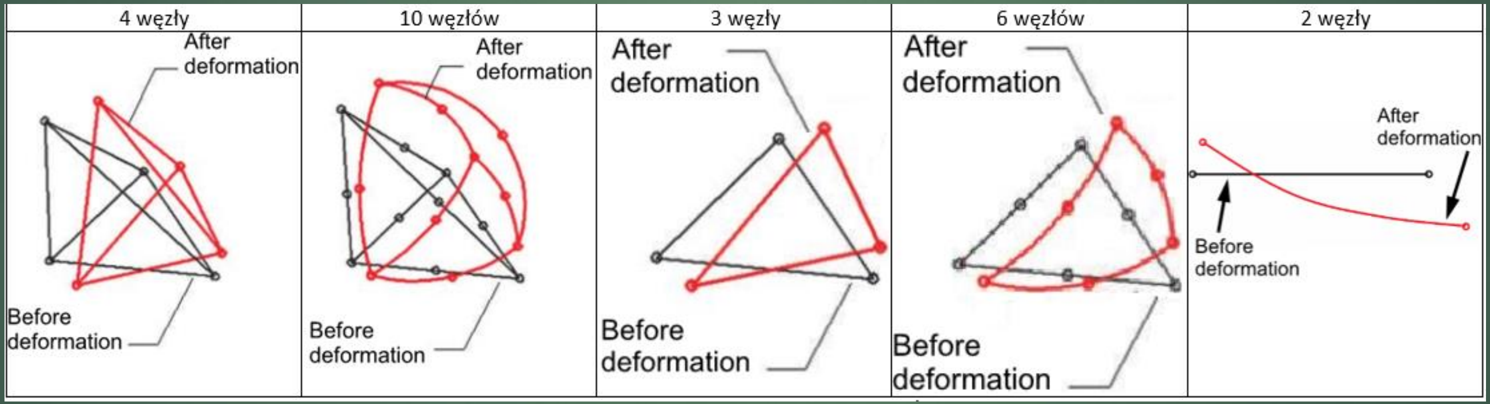
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Źródło: dr inż. K. Konowalski: *Podstawy Metody Elementów Skończonych, http://www.kmpkm.zut.edu.pl/pub/MES/WYKLADY/MBM-n2/W5.pdf*

Elementy skończone

- Są to proste figury geometryczne lub bryły składające się z węzłów.



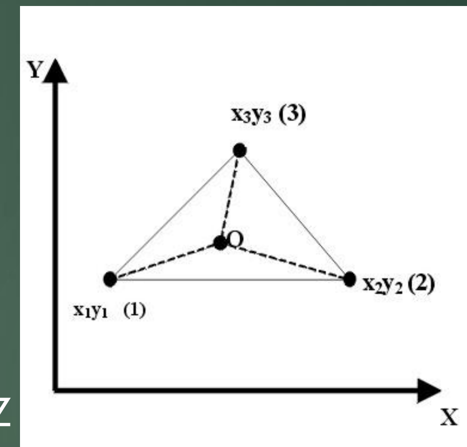
Źródło: https://premiumsolutions.pl/rodzaje-elementow-skonczonych-w-solidworks-simulation/

Metoda elementów skończonych

- Do wyznaczenia wielkości szukanych w punktach nie znajdujących się na wierzchołkach elementów skończonych służą **funkcje kształtu**.
- Funkcje kształtu mają postać wielomianów różnych rzędów.

MES

- Przykład funkcji kształtu dla elementu dwuwymiarowego – trójkąta
- Wewnątrz elementu skończonego o kształcie trójkątnym obieramy punkt i dzielimy element w ten sposób na trzy przyległe trójkąty. Wartość funkcji kształtu w wierzchołku 1 otrzymujemy przez podzielenie pola powierzchni trójkąta do którego należy bok leżący naprzeciw wierzchołka 1 przez pole powierzchni całego elementu skończonego.



$$N_1 = \frac{S_{23O}}{S_{123}} = \frac{xy_2 + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2 - x_2y - xy_3}{x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3}$$

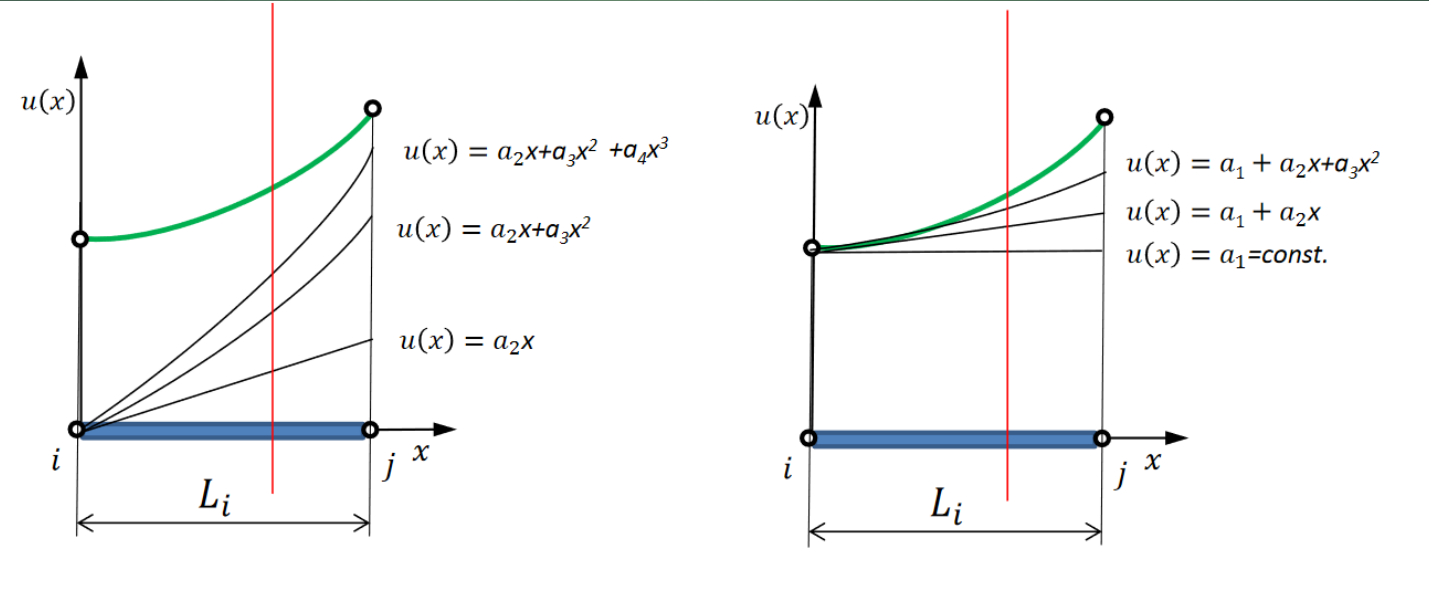
Źródło: https://zasoby1.open.agh.edu.pl/dydaktyka/obliczenia_inzynierskie/c_symulacja_procesow_przerobki/mes/funkcje.html

Metoda elementów skończonych

- Funkcje kształtu powinny zapewniać:
  - ciągłość przemieszczeń wewnątrz elementów oraz ich zgodność na granicach elementów, jest to tzw. kryterium zgodności,
  - możliwość opisywania stałych przemieszczeń elementu, a więc jego ruchu jako ciała sztywnego,
  - możliwość opisywania stałych odkształceń (a tym samym i naprężeń) wewnątrz elementu, występującego przy odpowiednich przemieszczeniach węzłów. Jest to tzw. kryterium stałych odkształceń. Wynika to z faktu, że wraz ze zmniejszaniem się elementów, istniejące w nich naprężenia dążą do pewnej stałej wartości

Metoda elementów skończonych

- Element jednowymiarowy 1D
  - Funkcja kształtu w postaci wielomianu: $u(x) = a_1 + a_2 x$
  - Funkcja jest ciągła
  - współczynnik a1, opisuje stałe przemieszczenia (gdy a2=0)
  - współczynnik a2opisuje stałe odkształcenia $\varepsilon = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = a_2 = const.$



Źródło: dr inż. K. Konowalski: *Podstawy Metody Elementów Skończonych, http://www.kmpkm.zut.edu.pl/pub/MES/WYKLADY/MBM-n2/W5.pdf*

Metoda elementów skończonych

- Dla układów liniowych rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania następującego równania:

$$\boldsymbol{K_e U = F}$$

K_e –globalna macierz sztywności,

U – wektor przemieszczeń węzłowych,

F – wektor sił węzłowych

Globalna macierz sztywności powstaje przez agregację sztywności poszczególnych elementów

WIMiM

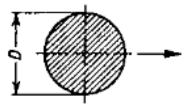
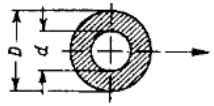
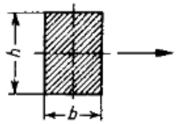
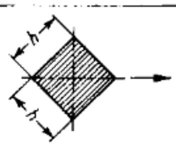
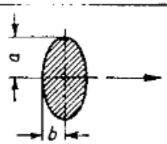
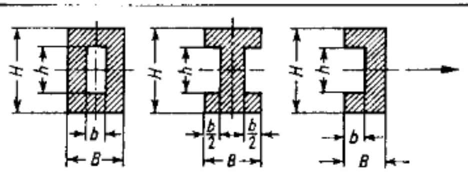
Przykład 1 - belka

- Wyznaczyć strzałkę ugięcia końca belki obciążonej siłą

$\ell = 2$ m
F= 500 N
a=100 mm

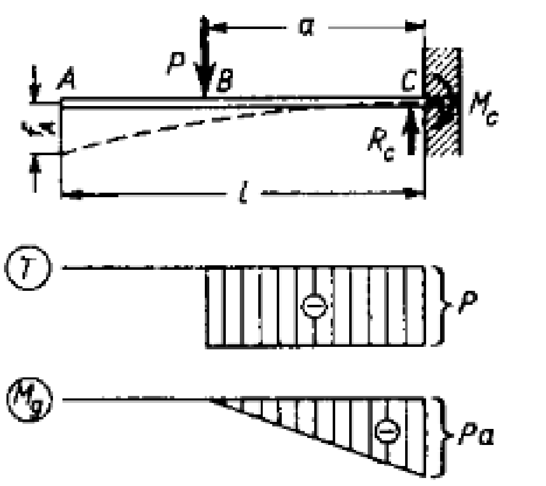
Przykład 1 - belka

- Moment bezwładności przekroju

	$J = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}, \quad W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}$
	$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ $W = \frac{\pi}{32}\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{4}\frac{R^4 - r^4}{R}$
	$J = \frac{bh^3}{12}, \quad W = \frac{bh^2}{6}$
	$J = \frac{h^4}{12}, \quad W = \frac{\sqrt{2}}{12}h^3$
	$J = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad W = \frac{\pi a^2 b}{4}$
	$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$

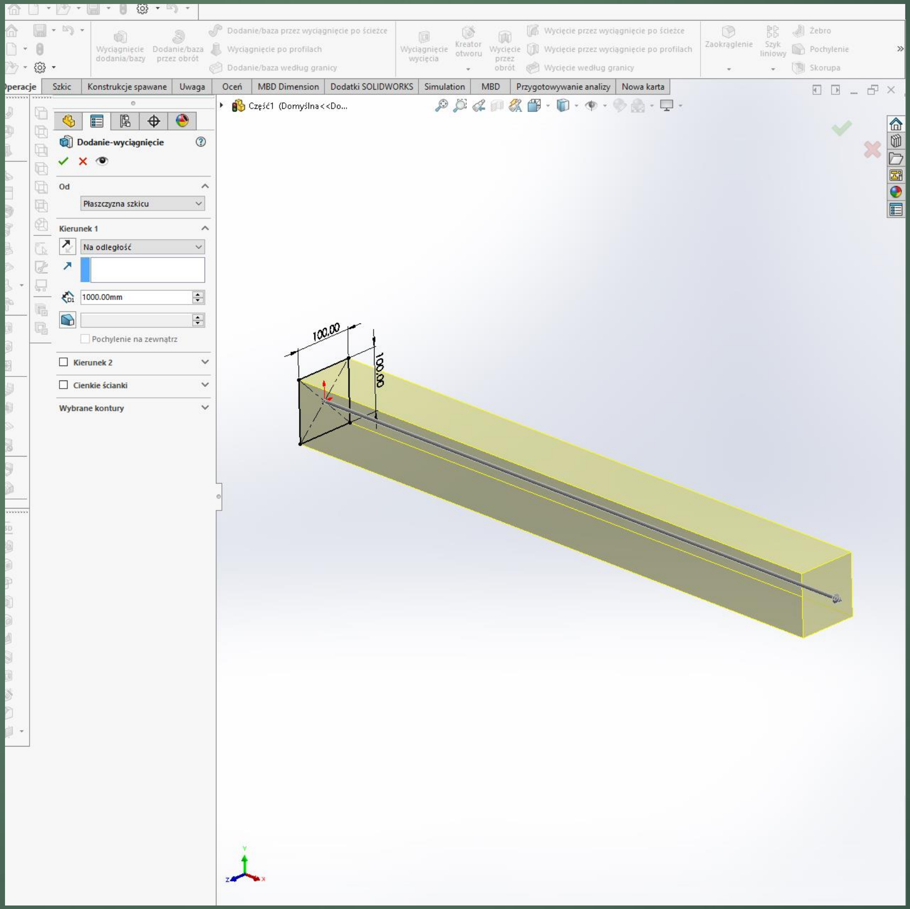
Przykład 1 - belka

- Moment bezwładności przekroju

1		$R_C = P,\quad M_C = Pa,$ $M_{\max} = Pa$ dla $x = l,$ $\theta_A = \theta_B = \dfrac{Pa^2}{2EJ},$ $f_{\max} = f_A = \dfrac{Pa^2}{6EJ}(3l - a),$ $f_B = \dfrac{Pa^3}{3EJ}$

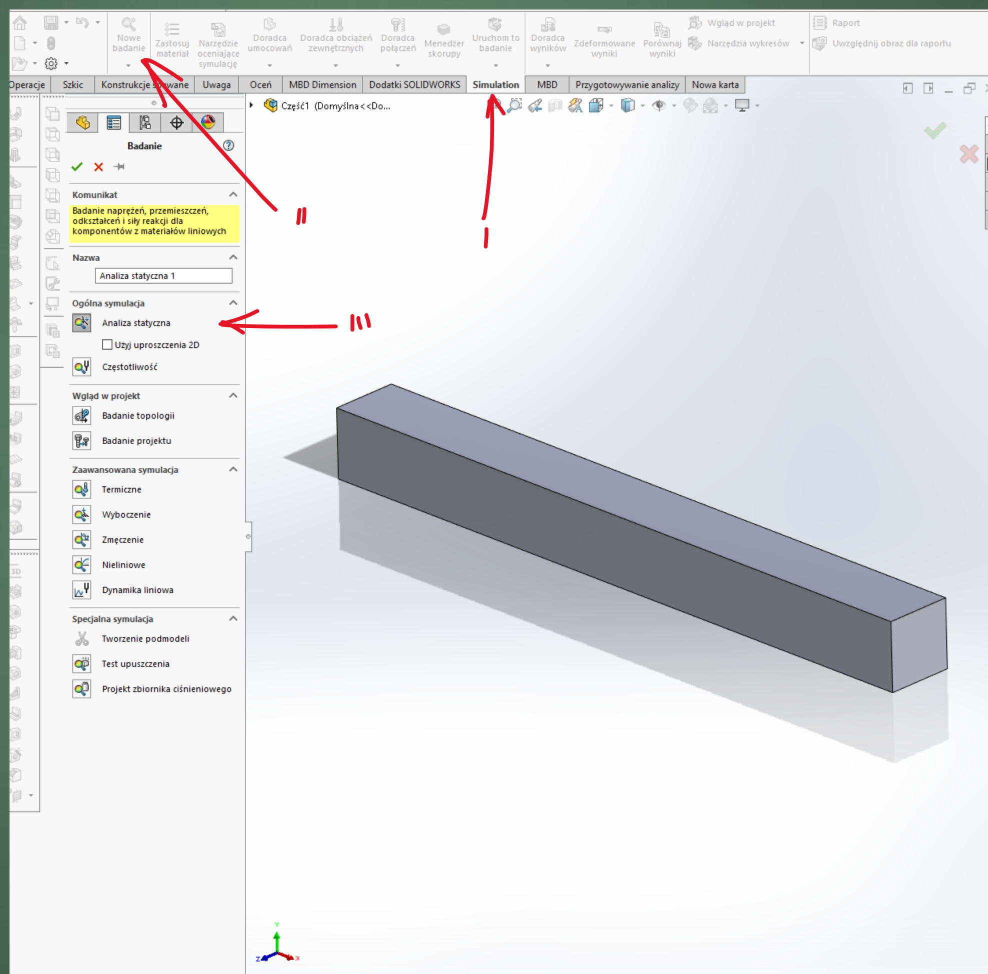
Przykład 1 - belka

- Solidworks



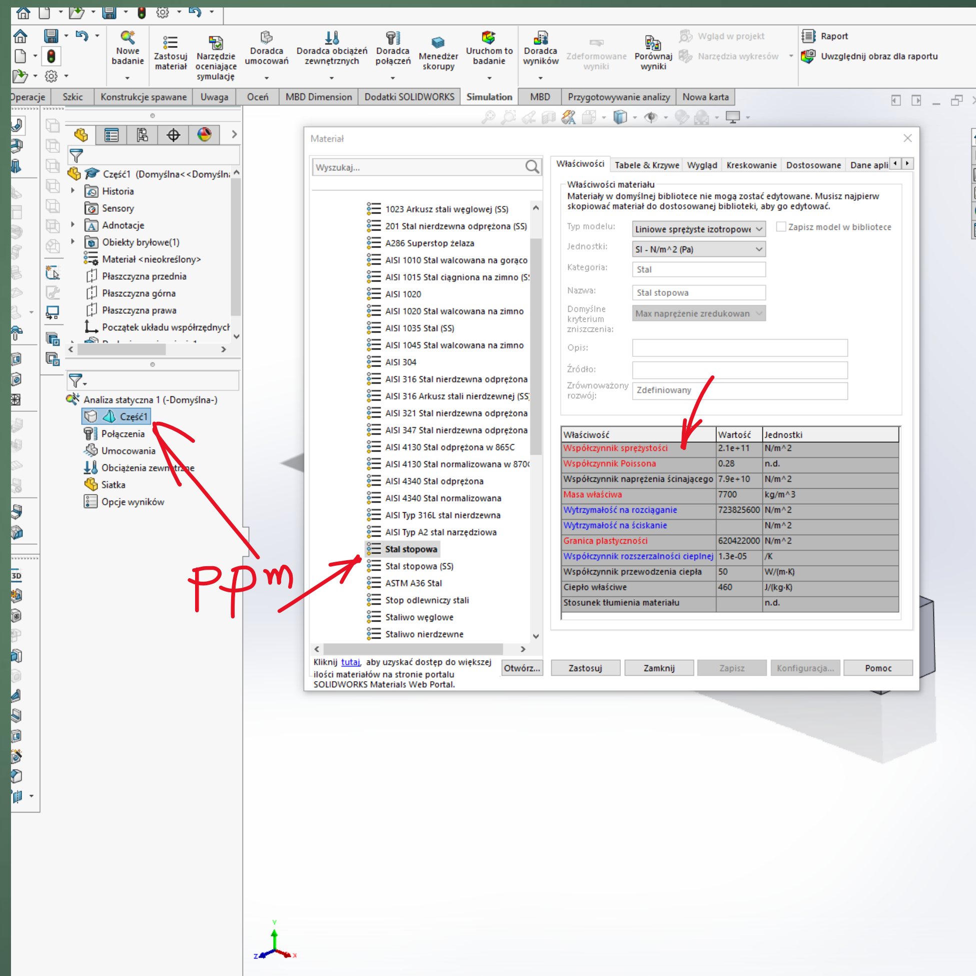
Przykład 1 - belka

- Solidworks



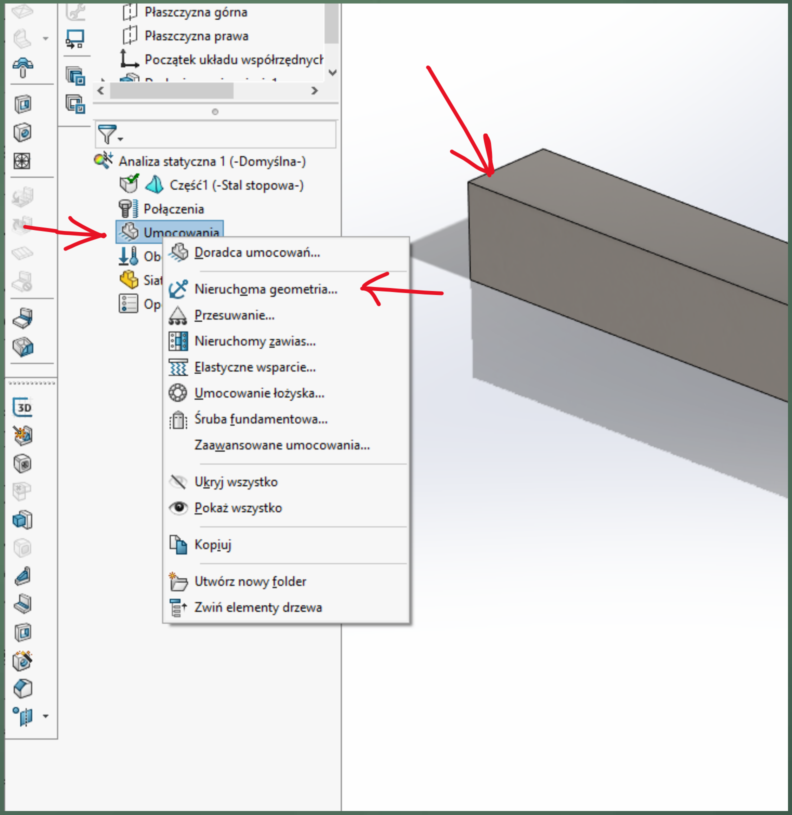
Przykład 1 - belka

- Solidworks



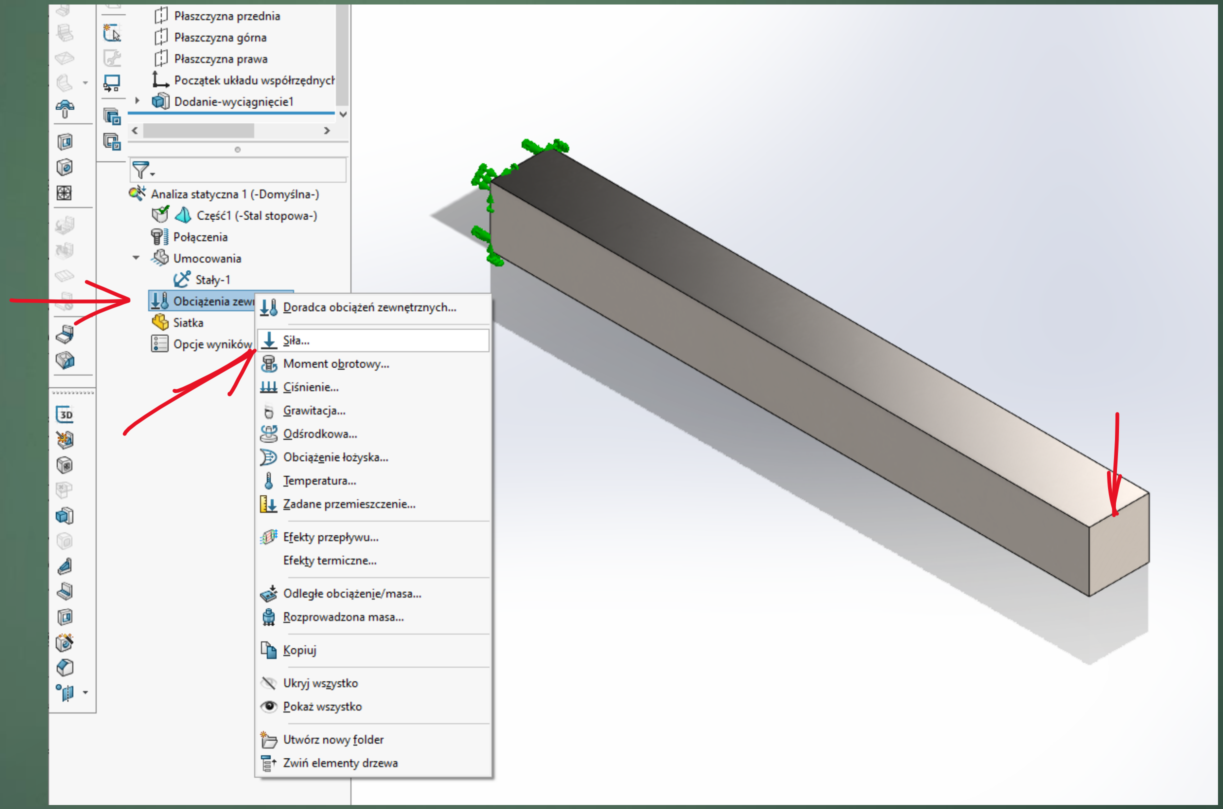
Przykład 1 - belka

- Solidworks



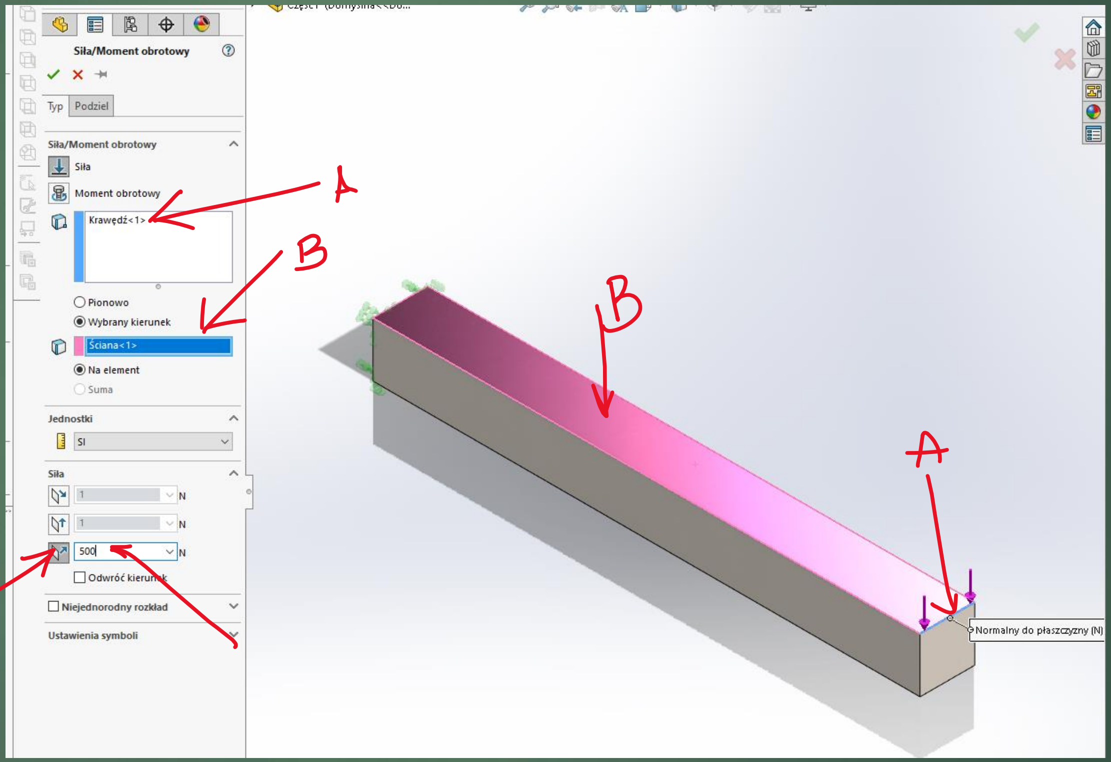
Przykład 1 - belka

- Solidworks



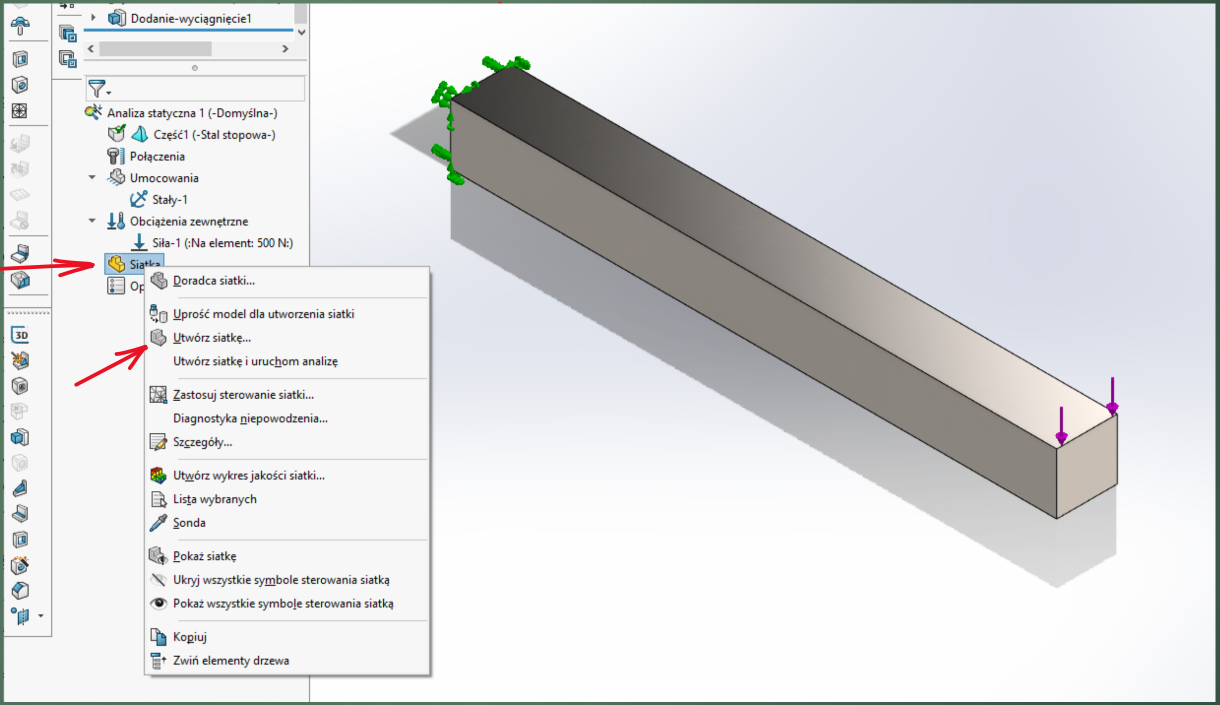
Przykład 1 - belka

- Solidworks



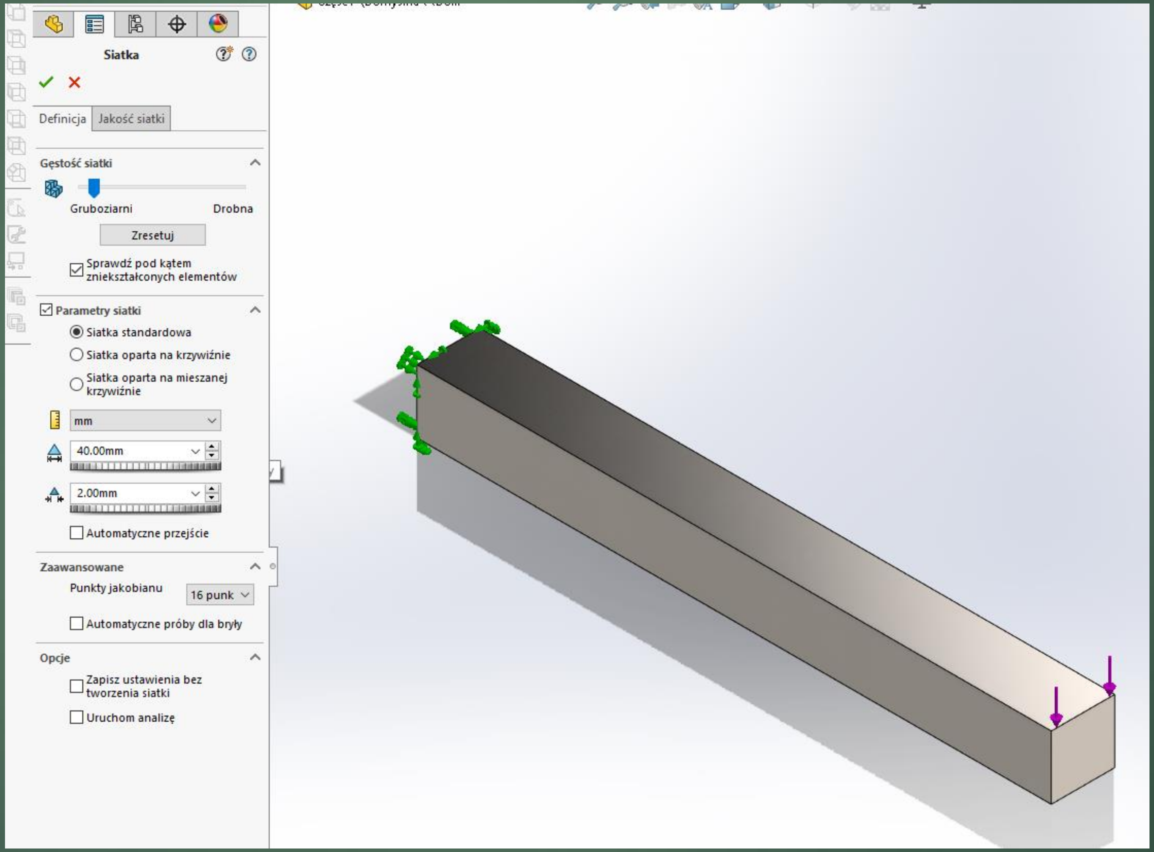
Przykład 1 - belka

- Solidworks



Przykład 1 - belka

- Solidworks



Przykład 1 - belka

- Solidworks